Übungen zu Mathematik III
Blatt 6

Aufgabe 1: Wir wollen den Flächeninhalt der Oberfläche O einer Kugel K mit Radius $R > 0$ berechnen. Hierzu können wir folgende Formel verwenden:

$$O = \iint\limits_K |\vec{N}(\varphi, \theta)| \, d\varphi \, d\theta \,,$$

wobei $\vec{N}|$ der Betrag des Normalenvektors ist. Berechnen Sie den Normalenvektor und bestimmen Sie anschließend die Oberfläche, indem Sie das Integral berechnen. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit Literaturwerten z.B. aus dem Internet!

Aufgabe 2: Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

durch die Oberfläche des halben Zylinders mit Radius $r = 1$ und Höhe $H = 1$ (siehe Abb. 1). Verwenden Sie hierzu geeignete Koordinaten, um die Oberfläche des Halbzylinders zu parametrisieren. Hilfreich könnte auch folgende Stammfunktion sein:

$$\int \sin^2 \varphi \, d\varphi = -\frac{1}{2} \sin(\varphi) \cos(\varphi) + \frac{1}{2} \varphi \,.$$

Aufgabe 3: Berechnen Sie den Fluss durch die Oberfläche des Einheitswürfels W (siehe Abb. 2) für das Vektorfeld:

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ x_2^2 \\ x_1 x_3 \end{pmatrix} .$$

Wenden Sie zur Vereinfachung der Rechnung den Gauß'schen Integralsatz an.

Aufgabe 4: Bestimmen Sie den Fluss des Vektorfeldes

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

durch die Kugeloberfläche der Kugel mit Radius R.

Aufgabe 5: Es ist folgendes Kraftfeld gegeben:

$$\vec{F}(x, y, z) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} x^2 - 2yz \\ xz - yz \\ xy + y^2 \end{pmatrix}$$

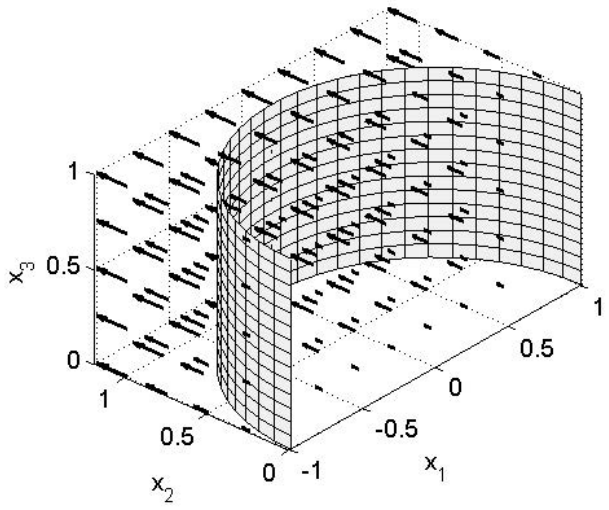


Abbildung 1: Fluss des Vektorfeldes $\vec{F}$ durch den Halbzylinder.

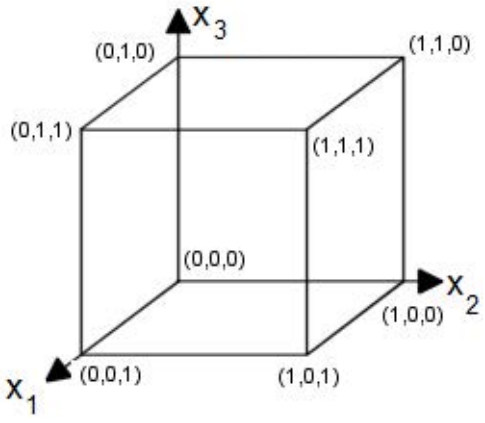


Abbildung 2: Einheitswürfel zu Auf. 3.

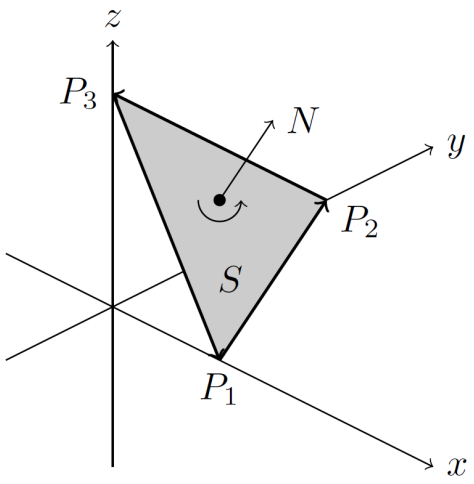


Abbildung 3: Dreieck zu Aufgabe 5.

Wir betrachten das Dreieck S, welches durch die drei Punkte

$$P_1 = (1,0,0)\,, \quad P_2 = (0,2,0) \quad \text{und} \quad P_3 = (0,0,2)$$

festgelegt wird (vgl. Abb. 3). Berechnen Sie folgende Größen:

a) die Rotation von $\vec{F}$

b) die von $\vec{F}$ geleistete Arbeit längs der orientierten Randkurve ∂S des Dreiecks S, indem Sie den Satz von Stokes anwenden. Das Dreieck kann wie folgt parametrisiert werden:

$$\vec{r}(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 2-2u-v \end{pmatrix}\,, \quad 0 \le u \le 1\,,\, 0 \le v \le 2-2u\,.$$

Zusatzaufgabe 6: Wir betrachten eine Temperaturverteilung in K, die quadratisch mit dem Abstand zur x_3-Achse wächst

$$T(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2 + T_0\,,$$

wobei T_0 eine feste Temperatur ist. Wir interessieren uns für den Wärmestrom durch die Oberfläche O eines Zylinders mit Höhe H und Radius R, d.h. wir müssen folgendes Oberflächenintegral berechnen:

$$\dot{Q} = -\lambda \oiint_O \nabla T \, d\vec{A}\,.$$

Hierbei bezeichnet λ die Wärmeleitfähigkeit in $W/(mK)$.

Hinweis: Berücksichtigen Sie bei der Integration die spezielle Form der Temperaturverteilung bzw. die Richtung des Temperautrgradienten, so können Sie das Integrationsgebiet vereinfachen.